0.5

Université A. Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques et Informatique

Année : 2008/2009
Analyse 2 : SMA

Série N^0 4

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(i) $(e^x + 1)y' - y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$.

Préciser la solution y_0 vérifiant $y_0(0) = -\dfrac{\pi}{4}$. Simplifier l'expression de y_0 pour $x > 0$.

(ii) $y' - (\operatorname{tg} x)y = e^x$ sur $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$.

Exercice 2. Intégrer les équations différentielles suivantes :

(i) $y'y = e^{x-y}$.

(ii) $y' = \dfrac{3y+x}{3x+y}$.

(iii) $y' - \dfrac{y}{2x} = 5x^2y^5$. - Bernoulli

(iv) $(1+x^3)y' + 2xy^2 + x^2y + 1 = 0$. Déterminer une solution particulière de la forme

$$y_0 = ax + b \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(i) $y'' + 2y' + 4y = x\,e^x$.

(ii) $y'' + 2y' + 2y = \sin(2x)\,e^{-x}$.

(iii) $y'' + y' - 2y = 2(1 + x - x^2)$.

(iv) $y'' - 2y' + y = 2x \operatorname{ch} x$.

(v) $y'' - y = -6\cos x$, $(\star)$.

Déterminer la solution y_1 de $(\star)$ vérifiant $y_1(0) = 0$ et $y_1'(0) = 1$.

ETUSUP .com

Université A. Essaâdi

Faculté des Sciences

Tétouan

Année : 2008-2009

Analyse 2 : SMA

Corrigé de la Série N°4.

Exercice 1.

(i) $(e^x+1)y' - y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$, (1).

$a(x) = e^x + 1$, $b(x) = -1$, $c(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$.

(1) est une équation différentielle linéaire du 1er ordre. a, b, c sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et a ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Alors, l'équation (1) admet des solutions sur $\mathbb{R}$.

Considérons l'équation sans second membre associée à (1) :

$$(e^x+1)y' - y = 0 \ , \ (E_0).$$

$(E_0) \Leftrightarrow \left[y' = \dfrac{1}{e^x+1} y \right]$ et $\left(-\dfrac{b}{a}\right)(x) = \dfrac{1}{e^x+1}$.

$$\int \left(-\frac{b}{a}\right)(x)\,dx = \int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{1+e^x-e^x}{e^x+1}\,dx$$

$$= \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right) dx = x - \operatorname{Log}(1+e^x) + \text{cte}.$$

ETUSUP .com

Une primitive de $\left(-\frac{b}{a}\right)$ sur $\mathbb{R}$ est $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x - \log(1+e^x)$$

D'où, la solution générale de (E_0) est $y_{E_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$y_{E_0}(x) = \lambda\, e^{x - \log(1+e^x)}$$
$$= \lambda\, e^x \cdot e^{\log\left(\frac{1}{1+e^x}\right)}$$

$$y_{E_0}(x) = \frac{\lambda e^x}{1+e^x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ quelconque.}$$

<u>Méthode de variation de la constante.</u>

On cherche une fonction dérivable $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $(\mathbb{R}, y)$ avec $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$y(x) = \dfrac{\lambda(x)\, e^x}{1+e^x}$ soit solution de (1).

$$y'(x) = \frac{\lambda'(x)\, e^x}{1+e^x} + \lambda(x) \cdot \frac{e^x(1+e^x) - e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{\lambda'(x)\, e^x}{1+e^x} + \lambda(x) \cdot \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x}}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{\lambda'(x)\, e^x}{1+e^x} + \frac{\lambda(x)\, e^x}{(1+e^x)^2}. \quad \text{D'où,}$$

$$\left[(e^x + 1)\, y'(x) - y(x) = \frac{e^x}{1+x^2} \right] \Longleftrightarrow$$

$$\left[\lambda'(x)\, e^x + \frac{\lambda(x)\, e^x}{1+e^x} - \frac{\lambda(x)\, e^x}{1+e^x} = \frac{e^x}{1+x^2} \right] \Longleftrightarrow$$

ETUSUP .com

$\Leftrightarrow \left[\lambda'(x) = \frac{1}{1+x^2} \right]$ car $e^x \neq 0$.

D'où, $\lambda(x) = \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arctg}\, x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$ quelconque.

Par conséquent, la solution générale de (1) sur $\mathbb{R}$ est

$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$y(x) = \lambda(x) \cdot \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$y(x) = (\text{Arctg}\, x + c) \cdot \frac{e^x}{1+e^x} \quad \text{avec } c \in \mathbb{R} \text{ quelconque.}$$

(*) <u>Solution y_0 satisfaisant la condition initiale $y_0(0) = -\frac{\pi}{4}$</u>

$\left[y_0(0) = -\frac{\pi}{4} \right] \Leftrightarrow \left[(\text{Arctg}\, 0 + c) \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{c}{2} = -\frac{\pi}{4} \right] \Leftrightarrow \left[c = -\frac{\pi}{2} \right]$.

$y_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$y_0(x) = \left(\text{Arctg}\, x - \frac{\pi}{2} \right) \frac{e^x}{1+e^x}.$$

(*) Pour tout $x > 0$, $\text{Arctg}\, x + \text{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

<u>En effet</u> : Posons, $g(x) = \text{Arctg}\, x + \text{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, on a

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0.$$

ETUSUP .com

Par suite, g est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x>0$, on a

$$g(x) = g(1) = \operatorname{Arctg} 1 + \operatorname{Arctg} 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Il s'ensuit, pour tout $x>0$, que

$$y_0(x) = -\operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{e^x}{1+e^x}.$$

(ii) $y' - (\operatorname{tg} x)\, y = e^x$, (1) sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$a(x) = 1$, $b(x) = -\operatorname{tg} x$, $c(x) = e^x$.

(1) est une équation différentielle linéaire du 1er ordre.

$\mathcal{D}_a = \mathcal{D}_c = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_b = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

a, b, c sont des fonctions continues sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et a ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Alors, l'équation (1) admet des solutions sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Considérons l'équation sans second membre associée à (1)

$$y' - (\operatorname{tg} x)\, y = 0, \quad (E_0).$$

$(E_0) \iff [\, y' = (\operatorname{tg} x)\, y \,]$ et $\left(-\frac{b}{a}\right)(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

ETUSUP .com

$$\int \left(-\frac{b}{a}\right)(x)\,dx = \int tg\,x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{\cos' x}{\cos x}\,dx$$

$$= -\log|\cos x| + cte = -\log(\cos x) + cte$$

car cos est strictement positive sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$$\int \left(-\frac{b}{a}\right)(x)\,dx = \log\left(\frac{1}{\cos x}\right) + cte.$$

Une primitive de $\left(-\frac{b}{a}\right)$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est $A :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$

définie par $A(x) = \log\left(\frac{1}{\cos x}\right)$.

D'où, la solution générale de (E_0) sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est

$y_{E_0} :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ définie par

$$(y_{E_0})(x) = \lambda\, e^{\log\left(\frac{1}{\cos x}\right)} = \frac{\lambda}{\cos x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ qcq.}$$

<u>Méthode de variation de la constante.</u>

On cherche une fonction dérivable $\lambda :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$

tel que $(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, y)$ avec $y :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$

définie par $y(x) = \dfrac{\lambda(x)}{\cos x}$ soit solution de (1).

$$y'(x) = \frac{\lambda'(x)}{\cos x} - \lambda(x) \cdot \frac{-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\lambda'(x)}{\cos x} + \lambda(x) \cdot \frac{tg\,x}{\cos x}.$$

<u>D'où</u>,

ETUSUP .com

$[\, y'(x) - (\operatorname{tg} x)\cdot y(x) = e^x \,] \Leftrightarrow$

$[\, \dfrac{\lambda'(x)}{\cos x} + \operatorname{tg} x \cdot \dfrac{\lambda(x)}{\cos x} - \operatorname{tg} x \cdot \dfrac{\lambda(x)}{\cos x} = \dfrac{\lambda'(x)}{\cos x} = e^x \,] \Leftrightarrow$

$[\, \lambda'(x) = \cos x \cdot e^x \,]$. D'où, $\lambda(x) = \int \cos x \cdot e^x \, dx$

On utilise deux intégrations par parties:

$$\begin{cases} u_1(x) = \cos x \\ v_1'(x) = e^x \end{cases}, \qquad \begin{matrix} u_1'(x) = -\sin x \\ v_1(x) = e^x. \end{matrix}$$

$$\lambda(x) = \cos x \cdot e^x + \int \sin x \cdot e^x \, dx.$$

$$\begin{cases} u_2(x) = \sin x \\ v_2'(x) = e^x \end{cases}, \qquad \begin{matrix} u_2'(x) = \cos x \\ v_2(x) = e^x. \end{matrix}$$

$$\lambda(x) = \cos x \cdot e^x + \sin x \, e^x - \overbrace{\int \cos x \cdot e^x \, dx}^{= \lambda(x)}.$$

$$\Rightarrow \lambda(x) = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x). + c$$

Une solution particulière de (1) sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est y_0 définie par $y_0(x) = \dfrac{\lambda(x)}{\cos x} = \dfrac{1}{2} e^x (1 + \operatorname{tg} x)$.

Et la solution générale de (1) sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est $y :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$y(x) = y_{E_0}(x) + y_0(x) = \frac{1}{2} e^x (1 + \operatorname{tg} x) + \frac{c}{\cos x}$$

avec $c \in \mathbb{R}$ quelconque.

ETUSUP .com

Exercice 2.

(i) $y' y = e^{x-y}$, (1).

(1) $\Leftrightarrow [y' y = e^x . e^{-y}] \Leftrightarrow [y e^y y' = e^x]$

$g(y) = y e^y$ et $h(x) = e^x$. g et h sont continues sur

(1) est une équation différentielle du 1er ordre à variables séparées.

$$(1) \Leftrightarrow [\, y e^y \, dy = e^x \, dx].$$

Par intégration, on obtient

$[\int y e^y \, dy = \int e^x \, dx] \Leftrightarrow [\int y e^y \, dy = e^x + c, c \in \mathbb{R}$ qcq

On intègre par parties :

$$\begin{cases} u(y) = y \\ v'(y) = e^y \end{cases}, \quad u'(y) = 1, \quad v(y) = e^y.$$

$$\int y e^y \, dy = y e^y - \int e^y \, dy = y e^y - e^y + \text{cte}.$$

D'où, les solutions de (1) vérifient l'équation

$$\boxed{(y-1) e^y = e^x + \lambda}$$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque.

(ii) $y' = \dfrac{3y + x}{3x + y}$, (1).

Sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$ et

ETUSUP .com

$I_2 =]0, +\infty[$, on a

$$(1) \Leftrightarrow \left[y' = \frac{\frac{3y+x}{x}}{\frac{3x+y}{x}} = \frac{3.\frac{y}{x}+1}{3+\frac{y}{x}} = f\left(\frac{y}{x}\right) \right].$$

(1) est une équation homogène.

<u>Solutions singulières de (1).</u>

Les solutions singulières de (1) sont les solutions de la forme

$$y = t\,x \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

$y' = t$ et par suite,

$$[(3x+y)y' = 3y+x,\ x \neq 0] \Leftrightarrow$$

$$[(3x+tx).t = 3tx+x,\ x \neq 0] \Leftrightarrow$$

$$[tx(3+t) = x(3t+1),\ x \neq 0] \Leftrightarrow$$

$$[3t+t^2 = 3t+1,\ x \neq 0] \Leftrightarrow$$

$$[t^2 = 1,\ x \neq 0] \Leftrightarrow [t = -1 \text{ ou } t = 1].$$

Il y a deux solutions singulières de (1) :

$y_1 = -x$ et $y_2 = x$ sur I_1 et I_2.

(*) Cherchons, maintenant, les solutions de (1) de la forme

$y = tx$ où t est une fonction dérivable.

On dérive par rapport à x : $y' = t'x + t$.

En portant dans l'équation (1), on obtient :

$$\left[t'x + t = \frac{3tx + x}{3x + tx} \text{ et } x \neq 0 \right] \Leftrightarrow$$

$$\left[t'x = \frac{3t+1}{3+t} - t \text{ et } x \neq 0 \right] \Leftrightarrow$$

$$\left[t'x = \frac{3t+1-3t-t^2}{3+t} = \frac{1-t^2}{3+t} \text{ et } x \neq 0 \right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{3+t}{1-t^2}\, dt = \frac{dx}{x}, \quad x \neq 0, \ t \neq 1 \text{ et } t \neq -1 \right]$$

(équation à variables séparées).

Par intégration, on obtient : $\int \frac{3+t}{1-t^2}\, dt = \int \frac{dx}{x}$.

Posons, $g(t) = \frac{3+t}{1-t^2}$. g est une fraction rationnelle ent. La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ s'écrit

$$g(t) = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t-1} \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}.$$

$$a = \left[(t+1)\, g(t) \right]_{t=-1} = \left[\frac{3+t}{1-t} \right]_{t=-1} = \frac{3-1}{2} = 1$$

ETUSUP .com

et $b = \left[(t-1)\,g(t)\right]_{t=1} = \left[-\dfrac{3+t}{1+t}\right]_{t=1} = -\dfrac{3+1}{1+1} = -2.$

$$g(t) = \frac{1}{t+1} - \frac{2}{t-1}.$$ Par suite,

$$\operatorname{Log}|x| = \int\left(\frac{1}{t+1} - \frac{2}{t-1}\right)dt =$$

$$= \log|t+1| - 2\log|t-1| + c, \quad c \in \mathbb{R} \text{ qcq.}$$

$$\operatorname{Log}|x| = \log\left(\frac{|t+1|}{(t-1)^2}\right) + c.$$

$$|x| = e^c \cdot e^{\log\left(\frac{|t+1|}{(t-1)^2}\right)} = \frac{e^c \cdot |t+1|}{(t-1)^2}.$$

D'où, $x = \lambda \cdot \dfrac{t+1}{(t-1)^2}$ avec $\lambda = \pm e^c$ et $c \in \mathbb{R}$ qcq.

Les courbes intégrales de (1) ont pour représentation paramétrique

$$\boxed{\begin{cases} x = \lambda \cdot \dfrac{t+1}{(t-1)^2} \\ y = t\,x = \lambda \cdot \dfrac{t^2+t}{(t-1)^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*. \end{cases}}$$

* (iii) $y' - \dfrac{y}{2x} = 5x^2 y^5.$

ETUSUP .com

$(1) \Leftrightarrow \left(y' = \frac{1}{2x} y + 5x^2 y^5 \right)$.

$a(x) = \frac{1}{2x}$, $b(x) = 5x^2$, $\alpha = 5 \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.

(1) est une équation de Bernoulli.

$\mathcal{D}_a = \mathbb{R}^*$ et $\mathcal{D}_b = \mathbb{R}$.

a et b sont des fonctions continues sur $\mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_b = \mathbb{R}^*$.

Donc, l'équation (1) admet des solutions sur chacun des intervalles

$$I_1 =]-\infty, 0[\quad \text{et} \quad I_2 =]0, +\infty[.$$

(*) Comme $\alpha = 5 \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ alors, $y = 0$ est une solution de (1) sur I_1 et I_2.

(*) On pose, $\boxed{z = y^{1-5} = y^{-4} = \frac{1}{y^4}}$ Donc, $z > 0$.

sur un intervalle où y ne s'annule pas, on a

$\boxed{\frac{y'}{y^5} = -\frac{1}{4} z'}$ $\frac{y'}{y^5} = \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{y^4} + 5x^2$ et $z' = (-4) \cdot \frac{y'}{y^5}$.

Par suite, la résolution de (1) se ramène à la résolution de l'équation linéaire suivante :

$$-\frac{1}{4} z' = \frac{1}{2x} z + 5x^2, \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \left[z' + \frac{2}{x} z = -20x^2 \right].$$

ETUSUP .com

L'équation sans second membre associée à (2) est

$$z' + \frac{2}{x} z = 0 \,, (E_0)$$

$(E_0) \Leftrightarrow (z' = -\frac{2}{x} z)$. Sur I_1 (resp. I_2), on a

$\int -\frac{2}{x} dx = -2 \log|x| + cte = \log(\frac{1}{x^2}) + cte$. D'où,

la solution générale de (E_0) sur I_i $(i = 1,2)$ est

$(z_{E_0})_i : I_i \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$(z_{E_0})_i(x) = \lambda_i \, e^{\log(\frac{1}{x^2})} = \lambda_i \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{\lambda_i}{x^2}$ avec

$\lambda_i \in \mathbb{R}$ quelconque.

(*) <u>méthode de variation de la constante.</u>

Cherchons une fonction dérivable $\lambda_i : I_i \to \mathbb{R}$ $(i = 1,2)$ tel que (I_i, z_i) avec $z_i : I_i \to \mathbb{R}$ définie par $z_i(x) = \frac{\lambda_i(x)}{x^2}$ soit solution de (2).

$z'_i(x) = \lambda'_i(x) \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \lambda_i(x)$. D'où, pour tout $x \in I_i$, on a

$[\, z'_i(x) + \frac{2}{x} z_i(x) = \lambda'_i(x) \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \lambda_i(x) + \frac{2}{x^3} \lambda_i(x) = -20x$

$\Leftrightarrow [\, \lambda'_i(x) = -20 x^4] \Rightarrow [\lambda_i(x) = -20 \int x^4 dx]$.

ETUSUP .com

D'où, $\lambda_i(x) = -4x^5 + c_i$ avec $c_i \in \mathbb{R}$ qcq.

Donc, la solution générale de (2) sur I_i $(i=1,2)$

est $z_i : I_i \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$z_i(x) = \dfrac{\lambda_i(x)}{x^2} = \dfrac{c_i - 4x^5}{x^2}$ avec $c_i \in \mathbb{R}$ tel que

$c_i - 4x^5 > 0$ (car $z_i > 0$). Or, $z_i = \dfrac{1}{y_i^4}$

Les courbes intégrales de (1) ont pour équation

cartésienne sur I_1 (resp. I_2)

$\boxed{(c_i - 4x^5)\, y_i^4 = x^2}$ avec $c_i \in \mathbb{R}$ telque $c_i - 4x^5 > 0$.

(iv) $(1+x^3)y' + 2x y^2 + x^2 y + 1 = 0$, (1).

$(1) \Leftrightarrow \left[y' = -\dfrac{2x}{1+x^3} y^2 - \dfrac{x^2}{1+x^3} y - \dfrac{1}{1+x^3} \right]$.

$\alpha(x) = -\dfrac{2x}{1+x^3}$, $\beta(x) = -\dfrac{x^2}{1+x^3}$, $\gamma(x) = -\dfrac{1}{1+x^3}$.

(1) est une équation de Riccati.

$(1+x^3 = 0) \Leftrightarrow (x = -1)$. D'où, $\mathcal{D}_\alpha = \mathcal{D}_\beta = \mathcal{D}_\gamma = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

α, β, γ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Donc,

l'équation (1) admet des solutions sur chacun des

intervalles $I_1 =]-\infty, -1[$ et $I_2 =]-1, +\infty[$.

ETUSUP .com

(*) Cherchons une solution particulière de (1) de la forme

$$y_0 = ax+b \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

$y'_0 = a$. Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$[(1+x^3)\,y'_0(x) + 2x\,y_0^2(x) + x^2 y_0(x) + 1 = 0] \Leftrightarrow$$

$$[(1+x^3)a + 2x(ax+b)^2 + x^2(ax+b) + 1 = 0] \Leftrightarrow$$

$$[ax^3 + a + 2a^2x^3 + 4abx^2 + 2b^2x + ax^3 + bx^2 + 1 = 0] \Leftrightarrow$$

$$[(2a+2a^2)x^3 + (4ab+b)x^2 + 2b^2x + a + 1 = 0]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+2a^2 = 0 \\ 4ab+b = 0 \\ 2b^2 = 0 \\ a+1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0. \end{cases}$$

D'où, $y_0 = -x$.

(*) On cherche la solution générale de (1) sous la forme

$$y = y_0 + \frac{1}{z} = -x + \frac{1}{z}.$$

$$y' = -1 - \frac{z'}{z^2}.$$

La résolution de (1) se ramène à la résolution de l'équation linéaire en z suivante :

$$[(1+x^3)\left(-1 - \frac{z'}{z^2}\right) + 2x\left(-x + \frac{1}{z}\right)^2 + x^2\left(-x + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0] \Leftrightarrow$$

ETUSUP .com

$$\left[-(1+x^3)\frac{z'}{z^2} - 1 - x^3 + 2x\left(x^2 - \frac{2x}{z} + \frac{1}{z^2}\right) - x^3 + \frac{x^2}{z} + 1 = 0\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[-(1+x^3)\frac{z'}{z^2} - \frac{3x^2}{z} + \frac{2x}{z^2} = 0\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[(1+x^3)z' + 3x^2 z = 2x\right], \ (2).$$

L'équation sans second membre associée à (2) est

$$(1+x^3)z' + 3x^2 z = 0, \ (E_0).$$

$(E_0) \Leftrightarrow \left[z' = -\frac{3x^2}{1+x^3} z\right]$. Or, sur I_1 ou I_2, on a

$$\int -\frac{3x^2}{1+x^3}\,dx = -\log|1+x^3| + \text{cte} = \log\left|\frac{1}{1+x^3}\right| + \text{cte}.$$

D'où, la solution générale de (E_0) sur I_i (avec $i=1,2$) est $(z_{E_0})_i : I_i \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(z_{E_0})_i(x) = \lambda_i e^{\log\left|\frac{1}{1+x^3}\right|} = \frac{\lambda_i}{|1+x^3|} \text{ avec } \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ qcq.}$$

$$(z_{E_0})_i(x) = \begin{cases} \dfrac{\mu_1}{1+x^3} & \text{si } i=1, \ \mu_1 = -\lambda_1 \in \mathbb{R} \text{ qcq} \\ \dfrac{\mu_2}{1+x^3} & \text{si } i=2, \ \mu_2 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ qcq.} \end{cases}$$

<u>Méthode de variation de la constante.</u>

Sur chacun des intervalles I_1 et I_2, on cherche une fonction dérivable $\mu_i : I_i \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i=1,2)$

ETUSUP .com

tel que (I_i, z_i) avec $z_i : I_i \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$z_i(x) = \dfrac{\mu_i(x)}{1+x^3}$ soit solution de (2).

$z_i'(x) = \dfrac{\mu_i'(x)}{1+x^3} - \dfrac{3x^2}{(1+x^3)^2}\mu_i(x)$. D'où,

$[(1+x^3)\, z_i'(x) + 3x^2 z_i(x) = 2x] \Leftrightarrow$

$[\mu_i'(x) - \dfrac{3x^2}{1+x^3}\mu_i(x) + \dfrac{3x^2}{1+x^3}\mu_i(x) = 2x] \Leftrightarrow$

$[\mu_i'(x) = 2x] \Rightarrow [\mu_i(x) = \int 2x\, dx]$

$\Rightarrow [\mu_i(x) = x^2 + c_i$ avec $c_i \in \mathbb{R}$ quelconque$]$.

D'où, la solution générale de (2) sur chacun des intervalles I_1 et I_2 est $z_i : I_i \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$z_i(x) = \dfrac{\mu_i(x)}{1+x^3} = \dfrac{x^2+c_i}{1+x^3}$ avec $c_i \in \mathbb{R}$ qcq.

Par conséquent, la solution générale de (1) est

$y_i : I_i \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ définie par

$y_i(x) = -x + \dfrac{1}{z_i(x)} = -x + \dfrac{1+x^3}{x^2+c_i}$

$\boxed{y_i(x) = \dfrac{1-c_i x}{x^2+c_i}}$ avec $c_i \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 + c_i \neq 0$.

ETUSUP .com

Exercice 3.

(i) $y'' + 2y' + 4y = xe^x$, (1).

$d(x) = xe^x$. d est continue sur $\mathbb{R}$.

(1) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et admet des solutions sur $\mathbb{R}$.

L'équation sans second membre associée à (1) est

$$y'' + 2y' + 4y = 0, \quad (E_0).$$

L'équation caractéristique de (E_0) est : $r^2 + 2r + 4 = 0$.

$\Delta' = 1 - 4 = -3 < 0$. On a deux racines complexes conjuguées :

$$r_1 = -1 + i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad r_2 = -1 - i\sqrt{3}.$$

Alors, la forme générale des solutions réelles de (E_0) est $y_{E_0} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$y_{E_0}(x) = e^{-x}\left(c_1 \cos(\sqrt{3}x) + c_2 \sin(\sqrt{3}x)\right) \text{ avec}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ quelconques.

<u>Recherche d'une solution particulière de (1).</u>

ETUSUP .com

$d(x) = x e^{x} = P_1(x) e^{1x}$ avec $P_1(x) = x$, $d^\circ P_1 = 1$ (1

et $r = 1 \in \mathbb{R}$.

$r = 1$ n'est pas racine de l'équation caractéristiqu

Alors, on cherche une solution particulière de (1) sous la forme

$y_0(x) = Q(x) e^{x}$ avec Q un polynôme tel que

$d^\circ Q = d^\circ P_1 = 1$. Posons, $Q(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

$y_0(x) = (ax + b) e^{x}$

$y'_0(x) = a e^{x} + (ax+b) e^{x} = a e^{x} + y_0(x)$

$y''_0(x) = a e^{x} + y'_0(x) = 2a e^{x} + y_0(x)$.

Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$[\, y''_0(x) + 2 y'_0(x) + 4 y_0(x) = x e^{x} \,] \Leftrightarrow$

$[\, 2a e^{x} + y_0(x) + 2a e^{x} + 2 y_0(x) + 4 y_0(x) = x e^{x} \,] \Leftrightarrow$

$[\, 4a e^{x} + 7 y_0(x) = (7ax + 7b + 4a) e^{x} = x e^{x} \,] \Leftrightarrow$

$[\, 7ax + 7b + 4a = x \,]$ car $e^{x} \neq 0$. D'où,

$$\begin{cases} 7a = 1 \\ 7b + 4a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{7} \\ b = -\frac{4}{7} a = -\frac{4}{49} \end{cases}$$

ETUSUP .com

Donc, $y_0(x) = \frac{1}{7}\left(x - \frac{4}{7}\right)e^x$.

Il en résulte que la solution réelle générale de (1) est $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$y(x) = y_{E_0}(x) + y_0(x)$$

$$y(x) = e^{-x}\left(c_1 \cos(\sqrt{3}x) + c_2 \sin(\sqrt{3}x)\right) + \frac{1}{7}\left(x - \frac{4}{7}\right)e^x$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ quelconques.

(ii) $y'' + 2y' + 2y = \sin(2x)e^{-x}$, (1).

$d(x) = \sin(2x)e^{-x}$. d est continue sur $\mathbb{R}$.

(1) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et admet des solutions sur $\mathbb{R}$.

L'équation sans second membre associée à (1) est

$$y'' + 2y' + 2y = 0, \quad (E_0).$$

L'équation caractéristique de (E_0) est : $r^2 + 2r + 2 = 0$.

$\Delta' = 1 - 2 = -1 = i^2 < 0$. On a deux racines complexes conjuguées : $r_1 = -1 + i$ et $r_2 = -1 - i$.

Alors, la forme générale des solutions réelles

de (E_0) est $y_{E_0} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$y_{E_0}(x) = e^{-x}(\lambda \cos x + \mu \sin x) \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ qcqs.}$$

<u>Recherche d'une solution particulière de (1).</u>

$$d(x) = e^{-x} \sin(2x) = e^{\alpha x}(0 \cdot \cos(\beta x) + \sin(\beta x)).$$

$(\alpha = -1$ et $\beta = 2) \Rightarrow \alpha + i\beta = -1 + 2i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique. Alors, on cherche une solution particulière de (1) de la forme

$$y_0(x) = e^{-x}(A \cos(2x) + B \sin(2x)) \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

$$y_0'(x) = -e^{-x}(A \cos(2x) + B \sin(2x)) + e^{-x}(-2A \sin(2x) + 2B \cos(2x)).$$

$$y_0'(x) = -y_0(x) + e^{-x}(-2A \sin(2x) + 2B \cos(2x)).$$

$$y_0''(x) = -y_0'(x) - e^{-x}(-2A \sin(2x) + 2B \cos(2x)) + e^{-x}(-4A \cos(2x) - 4B \sin(2x))$$

$$y_0''(x) = y_0(x) - 2e^{-x}(-2A \sin(2x) + 2B \cos(2x)) - 4y_0(x).$$

$$y_0''(x) = -3y_0(x) - 2e^{-x}(-2A \sin(2x) + 2B \cos(2x)).$$

ETUSUP .com

Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$[\, y''_0(x) + 2y'_0(x) + 2y_0(x) = e^{-x}\sin(2x)] \Leftrightarrow$$

$$[-3y_0(x) + e^{-x}(4A\sin(2x) - 4B\cos(2x)) - 2y_0(x)$$

$$+ e^{-x}(-4A\sin(2x) + 4B\cos(2x)) + 2y_0(x)$$

$$= -3y_0(x) = -3e^{-x}(A\cos(2x) + B\sin(2x))$$

$$= e^{-x}\sin(2x)] \Leftrightarrow$$

$$[-3A\cos(2x) - 3B\sin(2x) = \sin(2x)].$$ D'où,

$$\begin{cases} -3A = 0 \\ -3B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Donc, $y_0(x) = -\frac{1}{3}e^{-x}\sin(2x)$.

Il en résulte que la forme générale des solutions réelles de (1) est $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$y(x) = y_{E_0}(x) + y_0(x)$$

$$y(x) = e^{-x}[\lambda\cos x + \mu\sin x - \frac{1}{3}\sin(2x)]$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ quelconques.

ETUSUP .com

(iii) $y'' + y' - 2y = 2(1 + x - x^2)$, (1).

$d(x) = 2(1 + x - x^2)$. d est continue sur $\mathbb{R}$.

(1) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et admet des solutions sur $\mathbb{R}$. L'équation sans second membre associée à (1) est

$$y'' + y' - 2y = 0, (E_0).$$

L'équation caractéristique de (E_0) est : $r^2 + r - 2 = 0$.

$\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$. On a deux racines réelles distinct

$$r_1 = \frac{-1+3}{2} = 1 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-1-3}{2} = -2.$$

Alors, la solution générale de (E_0) est $y_{E_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$y_{E_0}(x) = \lambda e^{x} + \mu e^{-2x} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ qcqs.}$$

<u>Recherche d'une solution particulière de (1).</u>

$d(x) = 2(1 + x - x^2) = P_2(x)$, $d = P_2 = 2$.

On a, $a = b = 1$, $c = -2$.

Comme $c = -2 \neq 0$, on cherche une solution particulière de (1) de la forme

ETUSUP .com

$y_0(x) = Q(x)$ avec Q un polynôme

tel que $d^\circ Q = d^\circ P_2 = 2$.

Posons, $y_0(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$y'_0(x) = 2\alpha x + \beta$ et $y''_0(x) = 2\alpha$.

Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$[\, y''_0(x) + y'_0(x) - 2y_0(x) = 2(1 + x - x^2)] \Leftrightarrow$

$[\, 2\alpha + 2\alpha x + \beta - 2(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = 2 + 2x - 2x^2] \Leftrightarrow$

$[\, -2\alpha x^2 + (2\alpha - 2\beta)x + 2\alpha + \beta - 2\gamma = 2 + 2x - 2x^2]$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2\alpha = -2 \\ 2\alpha - 2\beta = 2 \\ 2\alpha + \beta - 2\gamma = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0. \end{cases}$$

Donc, $y_0(x) = x^2$.

Et la solution générale de (1) est $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

définie par $y(x) = y_{E_0}(x) + y_0(x)$

$y(x) = \lambda e^x + \mu e^{-2x} + x^2$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ qcqs.

ETUSUP .com

(iv) $y'' - 2y' + y = 2x\,\mathrm{ch}\,x$, (1)

$$d(x) = 2x\,\mathrm{ch}\,x = 2x \cdot \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = xe^{-x} + xe^{x}$$

$$= d_1(x) + d_2(x) \quad \text{avec}$$

$d_1(x) = xe^{-x}$ et $d_2(x) = xe^{x}$. d est continue sur $\mathbb{R}$.

(1) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et admet des solutions sur $\mathbb{R}$.

a) L'équation sans second membre associée à (1) est

$$y'' - 2y' + y = 0 \,,\ (E_0).$$

L'équation caractéristique de (E_0) est

$$r^2 - 2r + 1 = 0 = (r-1)^2 \iff (r = 1).$$

1 est une racine double du polynôme caractéristique

Alors, la solution générale de (E_0) est

$y_{E_0} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$y_{E_0}(x) = (\lambda x + \mu)\, e^{x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ quelconques.

b) <u>Recherche d'une solution particulière y_0 de (1).</u>

y_0 est de la forme

$$y_0 = y_1 + y_2$$

ETUSUP .com

avec y_1 est une solution particulière de

$$y'' - 2y' + y = d_1(x) = x e^{-x}$$

et y_2 est une solution particulière de

$$y'' - 2y' + y = d_2(x) = x e^{x}.$$

(*) $d_1(x) = x e^{-x} = P_1(x) e^{rx}$ avec

$P_1(x) = x$, $d^\circ P_1 = 1$ et $r = -1$.

Comme -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique

alors, $y_1(x) = Q(x) e^{-x}$ avec Q un polynôme dont

le degré est : $d^\circ Q = d^\circ P_1 = 1$. D'où,

$y_1(x) = (ax+b) e^{-x}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ à déterminer.

$y_1'(x) = a e^{-x} - (ax+b) e^{-x} = a e^{-x} - y_1(x)$

$y_1''(x) = -a e^{-x} - y_1'(x) = -2a e^{-x} + y_1(x).$

Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$[\, y_1''(x) - 2y_1'(x) + y_1(x) = x e^{-x} \,] \Leftrightarrow$

$[\, -2a e^{-x} + y_1(x) - 2a e^{-x} + 2y_1(x) + y_1(x) = x e^{-x} \,] \Leftrightarrow$

$[\, -4a e^{-x} + 4y_1(x) = (4ax + 4b - 4a) e^{-x} = x e^{-x} \,]$

ETUSUP .com

$\Leftrightarrow [\, 4ax + 4b - 4a = x \quad \text{car } e^{-x} > 0 \,]$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a = 1 \\ 4b - 4a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = a = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

D'où, $y_1(x) = \frac{1}{4}(x+1)e^{-x}$.

(*) $d_2(x) = x e^{x} = P_1(x) e^{rx}$ avec

$P_1(x) = x$, $d^\circ P_1 = 1$ et $r = 1$. Or, 1 est une racine double de l'équation caractéristique. D'où,

$y_2(x) = Q(x) e^{x}$ avec Q un polynôme tel que $d^\circ Q = d^\circ P_1 + 2 = 3$. Et comme toutes les fonctions $x \longmapsto (\gamma x + \delta) e^{x}$ vérifient l'équation (E_0), il suffit de chercher y_2 sous la forme

$$y_2 = (\alpha x^3 + \beta x^2) e^{x} \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$y_2'(x) = (3\alpha x^2 + 2\beta x) e^{x} + y_2(x)$$

$$\begin{aligned} y_2''(x) &= (6\alpha x + 2\beta) e^{x} + (3\alpha x^2 + 2\beta x) e^{x} + y_2'(x) \\ &= (6\alpha x + 2\beta) + (6\alpha x^2 + 4\beta x) e^{x} + y_2(x). \\ &= (6\alpha x^2 + (6\alpha + 4\beta) x + 2\beta) e^{x} + y_2(x). \end{aligned}$$

ETUSUP .com

Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$[\, y''_2(x) - 2\, y'_2(x) + y_2(x) = x\, e^x \,] \Leftrightarrow$$

$$[\, (6\alpha x + 2\beta) e^x + 2(3\alpha x^2 + 2\beta x)\, e^x + y_2(x) - 2(3\alpha x^2 + 2\beta x)\, e^x$$

$$- 2\, y_2(x) + y_2(x) = x\, e^x \,] \Leftrightarrow$$

$$[\, (6\alpha x + 2\beta)\, e^x = x\, e^x \,] \Leftrightarrow [\, 6\alpha x + 2\beta = x \text{ car } e^x > 0 \,].$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6\alpha = 1 \\ 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{6} \\ \beta = 0. \end{cases} \quad \text{D'où,}$$

$$y_2(x) = \frac{1}{6} x^3 e^x.$$

Par conséquent, $y_0 = y_1 + y_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$y_0(x) = y_1(x) + y_2(x) = \frac{1}{4}(x+1)\, e^{-x} + \frac{1}{6} x^3 e^x.$$

c) La solution générale de (1) est $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$y(x) = y_{E_0}(x) + y_0(x)$$

$$y(x) = (\lambda x + \mu)\, e^x + \frac{1}{4}(x+1)\, e^{-x} + \frac{1}{6} x^3 e^x$$

$$y(x) = \left(\frac{1}{6} x^3 + \lambda x + \mu\right) e^x + \frac{1}{4}(x+1)\, e^{-x} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ qcqs.}$$

ETUSUP .com

(v) $y'' - y = -6\cos x$, (*).

$d(x) = -6\cos x$. d est continue sur $\mathbb{R}$.

(1) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et admet des solutions sur $\mathbb{R}$. L'équation sans second membre associée à (1) est

$$y'' - y = 0, (E_0).$$

L'équation caractéristique de (E_0) est : $r^2 - 1 = 0$.

On a deux racines réelles distinctes : $r_1 = -1$ et $r_2 = 1$

Alors, la solution générale de (E_0) est $y_{E_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$y_{E_0}(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{x} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ quelconque}$$

<u>Recherche d'une solution particulière y_0 de (1).</u>

$d(x) = -6\cos x = e^{\alpha x} \cdot (-6\cos(\beta x) + 0 \cdot \sin(\beta x))$.

$(\alpha = 0$ et $\beta = 1) \Rightarrow \alpha + i\beta = i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique. Alors,

ETUSUP .com

$y_0(x) = A\cos x + B\sin x$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.

$y'_0(x) = -A\sin x + B\cos x$

$y''_0(x) = -A\cos x - B\sin x = -y_0(x)$.

Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$[y''_0(x) - y_0(x) = -2y_0(x) = -2A\cos x - 2B\sin x = -6\cos x]$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2A = -6 \\ -2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 0. \end{cases}$$

D'où, $y_0(x) = 3\cos x$.

Et la solution générale de (1) est $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$y(x) = y_{E_0}(x) + y_0(x)$$

$y(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{x} + 3\cos x$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ qcqs.

<u>Solution y_1 de (*) satisfaisant la condition initiale</u>

<u>$y_1(0) = 0$ et $y'_1(0) = 1$.</u>

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$y'(x) = -\lambda e^{-x} + \mu e^{x} - 3\sin x$.

ETUSUP .com

$$\begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y'_1(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu + 3 = 0 \\ -\lambda + \mu = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\mu + 3 = 1 \\ \lambda = \mu - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\mu = -2 \\ \lambda = \mu - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = -1 \\ \lambda = -2. \end{cases}$$

D'où, $y_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$y_1(x) = -2e^{-x} - e^{x} + 3\cos x.$$

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..